

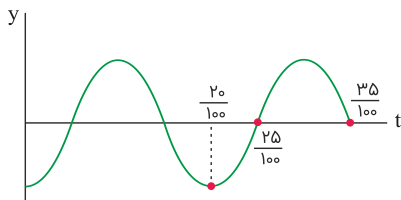


گام اول: دوره تناوب موج را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = v T \Rightarrow T = \frac{0.4}{v} = 0.2 \text{ s}$$

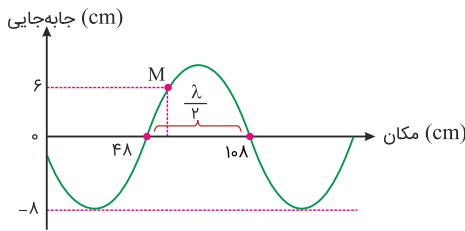
تا لحظه $t_1 = 0.25 \text{ s}$ نقطه M از $y = -A$ به $y = 0$ رسیده است، در واقع بعد از یک نوسان کامل حرکت روبه‌بالا دارد و به $y = 0$ رسیده است.

در لحظه $t = 0.35 \text{ s}$ نقطه M مجدداً در نقطه $y = 0$ قرار دارد و حرکت آن روبه‌پایین است: پس حرکت آن ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است. (نمودار مکان-زمان حرکت ذره M را مشاهده می‌کنید)



M

از روی نمودار نتیجه می‌گیریم که $\frac{\lambda}{۲} = ۶۰ \text{ cm}$ ؛ پس $\lambda = ۱۲۰ \text{ cm}$ است.



اکنون بسامد موج را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{۳۰۰}{۱/۲} = ۲۵۰ \text{ Hz}$$

حال دوره تناوب نوسان ذرات را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{۲۵۰} = ۴ \times ۱۰^{-۳} \text{ s}$$

تعداد نوسان ذرات را در مدت $۰/۳ \text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۰/۳}{۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۷۵$$

ذره در هر نوسان مسافتی به اندازه $۴A$ را می‌پیماید؛ پس مسافت طی‌شده در این مدت برابر است با:

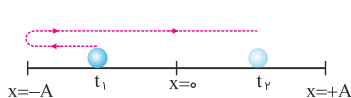
$$l = ۷۵(۴A) = ۷۵ \times ۴ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} = ۲۴ \text{ m}$$

$$\lambda + \frac{\lambda}{۴} = \frac{۵}{۴}\lambda \xrightarrow{\text{هم‌ارز}} \frac{۵}{۴}T$$

$$\frac{۵}{۴}T = ۱۵ \Rightarrow T = ۱۲ \text{ s}$$

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow ۱۲ = \frac{۳۰ \times ۶۰}{n} \Rightarrow n = \frac{۳۰ \times ۶۰}{۱۲} = ۱۵۰ \text{ می‌دهد}$$

باتوجه به نمودار صورت سؤال مسیر حرکت جسم به صورت زیر رسم می‌شود.



در مکان‌های منفی علامت شتاب مثبت و در مکان‌های مثبت علامت شتاب منفی است؛ بنابراین در بازه

زمانی خواسته شده یکبار علامت شتاب تغییر می‌کند. ازطرفی جهت حرکت هنگام عبور از دامنه

$x = \pm A$ تغییر می‌کند که باتوجه به شکل مسیر حرکت یکبار جهت حرکت تغییر می‌کند.

گام اول: از نمودار انرژی جنبشی- سرعت کمیت p را به دست می‌آوریم:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow 1/6 = \frac{1}{2}m \times (\lambda)^2 \Rightarrow m = \frac{2 \times 1/6}{\lambda^2} = \frac{1}{3\lambda^2} \text{ kg}$$

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3\lambda^2} \times (\lambda)^2 = \frac{1}{6\lambda^2} \Rightarrow p = 0.9 \text{ J}$$

$$v_{\max} = A\omega = A\omega = \lambda \quad (I)$$

گام دوم: از نمودار مکان- زمان ω را به دست آورده، سپس با استفاده از رابطه (I)، دامنه نوسان را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{16} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\omega}} = 4\omega \text{ rad/s}$$

$$(I) : A\omega = \lambda \Rightarrow A \times 4\omega = \lambda \Rightarrow A = \frac{\lambda}{4\omega} = 0.2 \text{ m}$$

گام سوم: با معلوم شدن A و ω معادله مکان- زمان را مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از آن کمیت مجهول q را محاسبه می‌کنیم:

$$x = A \cos \omega t = 0.2 \cos 4\omega t$$

$$q \text{ در نقطه } : 0.1 = 0.2 \cos 4\omega q \Rightarrow \cos 4\omega q = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 4\omega q = \frac{\pi}{3} \Rightarrow q = \frac{\pi}{12\omega}$$

گام اول: معادله مکان- زمان نوسانگر را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{4} T = \Delta s \Rightarrow T = 4s \\ A = 20 \text{ cm} \\ x = A \cos \frac{2\pi}{T} t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{(cm)} &= 20 \cos \frac{2\pi}{4} t \\ x_{(cm)} &= 20 \cos \frac{\pi}{2} t \end{aligned}$$

گام دوم:

مکان نوسانگر را در لحظه‌های t_1 و t_2 به دست می‌آوریم:

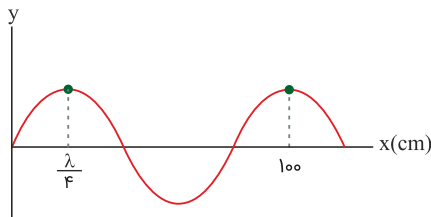
$$x_1 (\text{cm}) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3}\right) = 20 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = 10 \text{ cm}$$

$$x_2 (\text{cm}) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{4}{3}\right) = 20 \cos \frac{2\pi}{3} = 20 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x_2 = -10\sqrt{3} \text{ cm}$$

گام سوم: حالا جابه‌جایی نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -10\sqrt{3} - 10 = -10(1 + \sqrt{3})$$

باتوجه به شکل زیر داریم:



$$\frac{\lambda}{4} = 100 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 0.4 \text{ m}$$

$$\text{بسامد } f = \frac{n}{t} = \frac{100}{1} = 100 \text{ Hz} \rightarrow \text{تندی انتشار موج } v = \lambda \cdot f = 0.4 \times 100 = 40 \text{ m/s}$$

جرم واحد طول طناب $\mu = \frac{m}{L}$ است.

$$\mu = \frac{0.4 \times 10^{-3} \text{ kg}}{10^{-2} \text{ m}} = 0.04 \text{ kg/m}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 40 = \sqrt{\frac{F}{0.04}} \Rightarrow F = 256 \text{ N}$$

باتوجه به نمودار $T = 0.4 \text{ s}$ است. در یک حرکت هماهنگ ساده در بازه زمانی $\frac{T}{4}$ نوسانگر از مکان x به مکان $-x$ می‌رسد و در این مدت مسافت $2A$ را طی می‌کند. باتوجه به اینکه $0.2 \text{ s} = \frac{T}{4}$ است، پس نوسانگر در این بازه مسافت $2A = 0.4 \text{ m}$ را طی کرده است. بنابراین:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{0.4}{0.2} = 2 \text{ m/s}$$

دقت کنید که در نقش موج، هر نقطه، حرکت نقطه مقابل خود را تقلید می‌کند پس نقطه b و d به سمت بالا حرکت می‌کنند و نقطه c ، به سمت پایین. ضمناً نقاط در روی محور x دارای حداکثر تندی هستند پس نقاط b و d دارای حداکثر سرعت با علامت مثبت هستند. ضمناً در قله‌ها و دره‌ها شتاب ذرات حداکثر است ولی چون طبق رابطه $a = -\omega^2 x$ شتاب با بعد علامت مخالف دارد در بوندهای منفی علامت شتاب مثبت است پس در نقطه e شتاب حداکثر و مثبت است. ضمناً در قله‌ها و دره‌ها انرژی پتانسیل نیز به حداکثر خود می‌رسد پس در f و e انرژی پتانسیل حداکثر است.

باتوجه به شکل هر یک چهارم دوره تناوب برابر با ۱ s است. در نتیجه دوره تناوب برابر با ۴ ثانیه است. طبق رابطه $\omega = \frac{2\pi}{T}$ داریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=4s} \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

حال از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بهره می‌جوییم:

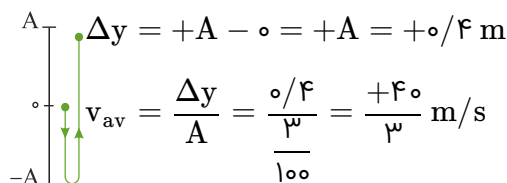
$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} \times m = k \xrightarrow{m=0.1} \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{10} = k \Rightarrow k = \frac{\pi^2}{40}$$

گام اول: باتوجه به نقش موج داده شده، دوره نوسان ذرات موج برابر است با:

$$\frac{3}{4}\lambda = 0.4 \Rightarrow \lambda = 0.4 \text{ m}$$

$$\lambda = v.T \Rightarrow 0.4 = 10 \times T \Rightarrow T = 0.04 \text{ (s)}$$

گام دوم: مدت زمان $\frac{3}{100}$ ثانیه برابر با $\frac{3T}{4}$ است. در این مدت جابه‌جایی و مسیر نوسان ذره A به صورت زیر است. باتوجه به اینکه ذره A در لحظه t به سمت پایین نوسان می‌کند مسیر مطابق شکل زیر است:



$$\Delta y = +A - 0 = +A = +0.4 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{A} = \frac{0.4/3}{100} = \frac{40}{3} \text{ m/s}$$

$$\Delta x_{AB} = \frac{\lambda}{12} + \frac{\lambda}{12} = \frac{\lambda}{6}$$

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \frac{\lambda}{6} = 20 \times 0.06 \Rightarrow \lambda = 6 \times 1/2 = 3 \text{ m}$$

باتوجه به شکل طول موج را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{2}\lambda = 15 \text{ cm} = \lambda = 10 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 0.1 \text{ m}$$

بسامد موج را محاسبه می‌کنیم:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{30}{0.1} = 300 \text{ Hz}$$

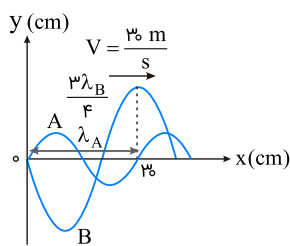
موج عرضی در راستای محور x منتشر می‌شود پس نوسانگر در راستای y نوسان می‌کند. باتوجه به اینکه $A = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ است، از معادله $y = A \cos 2\pi ft$ معادله نوسان منبع موج را به دست می‌آوریم.

$$y = 2 \times 10^{-2} \cos 600\pi t$$

باتوجه به شکل، طول موج هر کدام از موج‌های در حال انتشار A و B برابر است با:

$$\begin{cases} \lambda_A = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m} \\ \frac{3\lambda_B}{4} = 30 \text{ cm} \Rightarrow \lambda_B = 0.4 \text{ m} \end{cases}$$

کافی است دوره تناوب هر موج را به دست آورده تا در نهایت تعداد نوسانات هر کدام از موج‌ها در ۲۰ ثانیه محاسبه شود:



$$\lambda = vT \Rightarrow \begin{cases} \lambda_A = vT_A \Rightarrow 0.3 = 30 \times T_A \Rightarrow T_A = 0.01 \text{ s} \\ \lambda_B = vT_B \Rightarrow 0.4 = 30 \times T_B \Rightarrow T_B = \frac{4}{300} \text{ s} \end{cases}$$

$$N = \frac{t}{T} \Rightarrow \begin{cases} N_A = \frac{t}{T_A} = \frac{20}{0.01} = 2000 \\ N_B = \frac{t}{T_B} = \frac{20}{\frac{4}{300}} = 1500 \end{cases} \Rightarrow N_A - N_B = 2000 - 1500 = 500$$

$$L = (10 - 5) \times 2 = 10 \text{ cm}$$

$$\bar{S} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow 1/2 = \frac{0.1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{0.1}{1/2} = \frac{1}{12} \text{ (s)}$$

$$x = A \cos(\omega t) \Rightarrow -5 = 10 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \omega t_2 = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega \times \frac{1}{12} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = 8\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 4 \text{ (Hz)}$$

راه حل اول:

$$\frac{\lambda}{f} = 10\text{cm} = 0.1\text{m} \Rightarrow \lambda = 0.4\text{m}$$

مطابق شکل:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ رابطه داریم:}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{3\lambda}{f} \Rightarrow \Delta t = \frac{3 \times 0.4}{10} \text{ s} = \frac{3}{100} \text{ s}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\lambda}{f} = 10\text{cm} = 0.1\text{m} \Rightarrow \lambda = 0.4\text{m}$$

مطابق شکل:

$$\begin{cases} f = \frac{v}{\lambda} \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \times 10}{0.4} = 50\pi \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} \text{ s}$$

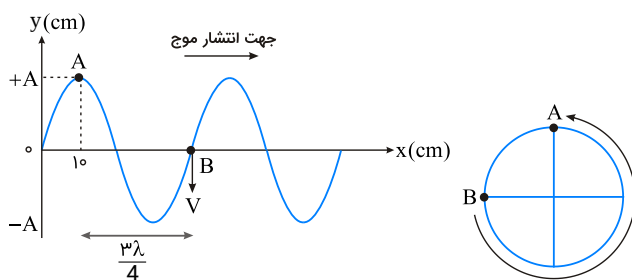
$$\Delta t_{AB} = \frac{3T}{f} \Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{3}{f \times 25} = \frac{3}{100} \text{ s}$$

مطابق شکل:

راه حل سوم:

ابتدا فاز ذره های A و B را روی دایره نوسان مشخص می کنیم و متوجه می شویم که ذره B برای رسیدن به موقعیت ذره A باید $\frac{3\pi}{2}$ تغییر فاز بدهد: $(\Delta\phi = \frac{3\pi}{2})$

حالا از روی شکل، طول موج را حساب می کنیم و در رابطه $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ جایگذاری می کنیم تا ω به دست آید:



$$\frac{\lambda}{f} = 10\text{cm} = 0.1\text{m} \Rightarrow \lambda = 0.4\text{m}$$

مطابق شکل:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \\ v = 10\text{m/s} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{0.4} = \frac{\omega}{10} \Rightarrow \omega = 50\pi \text{ rad/s}$$

در نهایت با استفاده از معادله $\Delta\phi = \omega \times \Delta t$ ، مدت زمانی را که طول می کشد تا ذره B به موقعیت ذره A برسد، محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} \Delta\phi = \omega \times \Delta t \\ \Delta\phi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \\ \omega = 50\pi \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = 50\pi \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0.03 \text{ s}$$

گزینه ۴

۱۷

$$\frac{T}{\gamma} = \frac{v}{c} \Rightarrow T = \frac{v}{\omega}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{\omega} + \frac{T}{\omega} + \frac{T}{\omega} = \frac{3T}{\omega}$$

$$L = \frac{v}{\omega} + \frac{v}{\omega} + \frac{v}{\omega} = \frac{3v}{\omega} = \frac{3 \times 10}{\omega} = 3 \times \frac{10}{\omega}$$

$$\bar{S} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3 \times \frac{10}{\omega}}{\frac{3T}{\omega}} = \frac{3 \times 10}{3T} = \frac{10}{T} = 10 \times \frac{1}{T} = 10 \times \frac{\omega}{v} = 10 \times \frac{\omega}{10} = \omega \text{ m/s}$$

گزینه ۴

۱۸

$$t = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$t = \frac{T}{\omega} \Rightarrow v = v_{\max}$$

$$\Delta t = \frac{T}{\omega} + \frac{T}{\omega} + \frac{T}{\omega} = \frac{3T}{\omega} = \frac{1}{\omega} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega} \text{ (s)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{\max} = A\omega = 1 \times 2\pi = 2\pi \text{ cm/s}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi - 0}{\frac{1}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2\pi}} = 4\pi^2 \text{ cm/s}^2 = 4\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

گزینه ۲

۱۹

$$\frac{3\lambda}{4} = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{40}{3} \text{ cm} = \frac{40}{3} \text{ m}$$

$$\frac{v}{v_m} = \frac{\frac{\lambda}{T}}{A\omega} = \frac{\frac{\lambda}{T}}{A \times \frac{2\pi}{T}} = \frac{\lambda}{2\pi A} = \frac{\frac{40}{3}}{2\pi \times \frac{40}{3}} = \frac{1}{\pi}$$

باتوجه به شکل نمودار می‌فهمیم که $\frac{5}{2}\lambda = 4 \text{ m}$ است؛ پس:

$$\frac{5}{2}\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5} \text{ m}$$

از رابطه $T = \frac{\lambda}{v}$ دوره تناوب را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{\frac{8}{5} \text{ m}}{24} = \frac{1}{15} \text{ s}$$

تعداد نوسان‌هایی را که نقطه A در مدت زمان s انجام داده است، محاسبه می‌کنیم:

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow n = \frac{0.4}{\frac{1}{15}} = 6$$

ذره A در هر نوسان مسافتی را به اندازه 4 A طی می‌کند؛ پس:

$$\ell = 6 \times 4 \text{ A} = 6 \times 4 \times (0.15) = 3.6 \text{ m}$$

باتوجه به اینکه در هر دوره نوسانگر ۲ بار تغییر جهت می‌دهد، در هر نصف دوره یکبار تغییر جهت می‌دهد. کافی است مشخص کنیم Δt با T چه رابطه‌ای دارد.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{9}{4} \text{ s}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ s} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{4} \text{ s}$$

$$\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} = 9 \Rightarrow 9 \text{ بار تغییر جهت}$$

گام اول: باتوجه به نمودار، دوره تناوب و دامنه نوسان را تعیین می‌کنیم؛ سپس معادله حرکت نوسانگر را می‌نویسیم.

$$T = t_p = 0.4 \text{ s}, \quad A = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

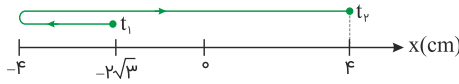
$$x = A \cos \omega t = 4 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 4 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{0.4}t\right) = 4 \times 10^{-2} \cos 5\pi t$$

گام دوم: در لحظه t_1 ، برای اولین بار مکان نوسانگر برابر با $-0.02\sqrt{3} \text{ m}$ شده است؛ بنابراین t_1 برابر است با:

$$x = 4 \times 10^{-2} \cos 5\pi t \Rightarrow -0.02\sqrt{3} = 4 \times 10^{-2} \cos 5\pi t_1 \Rightarrow \cos 5\pi t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 5\pi t_1 = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \dots \xrightarrow{\text{برای اولین بار}} 5\pi t_1 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{6} \text{ s}$$

گام سوم: نمودار مسیر حرکت نوسانگر از t_1 تا t_p مطابق شکل زیر است. با استفاده از نمودار، مسافت طی‌شده در این بازه را تعیین می‌کنیم، سپس تندی متوسط را با استفاده از رابطه $S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم.



$$\ell = (4 - 2\sqrt{3}) + 4 + 4 = 12 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{\frac{4}{10} - \frac{1}{6}} = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{\frac{12 - 5}{30}} = \frac{360 - 60\sqrt{3}}{7}$$

باتوجه به نمودار از ثانیه ۱ تا ثانیه ۲ نوسانگر به اندازه $\frac{T}{2}$ حرکت کرده است همچنین داریم:

$$F_{\max} = 10 \text{ N}$$

$$\frac{T}{2} = 1 \Rightarrow T = 2 \text{ s} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \omega = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi \text{ rad/s}$$

$$F_{\max} = mA\omega^2 \Rightarrow 10 = 1 \times A \times \pi^2 \xrightarrow{\pi^2=10} A = 1 \text{ m}$$

$T = 2 \text{ s}$ و چون در این مدت به اندازه $4A$ حرکت کرده است پس در مدت ۴ ثانیه به اندازه $8A$ حرکت می‌کند.

$$T \propto 4A \Rightarrow 2T \propto 8A \xrightarrow{A=1} 2 \times 1 = 2 \text{ m}$$

از نمودار (الف) می‌توان طول موج را به دست آورد که برابر است با فاصله دو قله یا دو دره متوالی:

$$a = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2a$$

از نمودار (ب) می‌توان دوره تناوب را به دست آورد که برابر است با زمان یک دوره کامل:

$$b = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4b$$

طبق تعریف تندی موج داریم:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2a}{4b} = \frac{a}{2b}$$

و تنها گزینه‌ای که می‌تواند صحیح باشد:

$$\frac{a}{2b} = \frac{400}{2 \times 1} = 200 \text{ m/s}$$

کمترین بسامد قابل شنود توسط انسان برابر با ۲۰ هرتز است.

طول موج برابر است با فاصله دو نقطه متوالی که دارای حداکثر فشار یا حداقل فشار هستند.

$$\lambda = 2 \times 7/5 = 15 \text{ m}$$

$$v = \lambda \times f = 15 \times 20 = 300 \text{ m/s}$$

باتوجه به نمودار $\frac{\lambda}{2} = 0/2$ و در نتیجه $\lambda = 0/4 \text{ m}$ است. از طرفی با استفاده از رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ می‌توان نوشت:

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{20 \times 10^{-3} \text{ kg}}{1} \frac{\text{kg}}{\text{m}}, \quad v = \sqrt{\frac{128}{2 \times 10^{-2}}} = 80 \text{ m/s}$$

حال با استفاده از رابطه $\lambda = vT$ می‌توان دوره تناوب را به دست آورد:

$$\lambda = vT \Rightarrow 0/4 = 80T \Rightarrow T = 2 \times 10^{-2} \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

بنابراین 40 ms برابر با $2T$ است. از طرفی چون هریک از ذرات ریسمان در هر دوره تناوب به اندازه $4A$ مسافت طی می‌کنند، پس در مدت زمان $2T$ به اندازه $8A$ ($2 \times 4A$) مسافت طی می‌کند، یعنی:

$$8A = 8 \times \frac{15}{100} = 1/2 \text{ m}$$

$$\lambda - \frac{\lambda}{12} = \frac{11\lambda}{12} = 1/1 \Rightarrow \lambda = 1/2 \text{ m}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{1/2}{300} = 0.00167 \text{ s} \Rightarrow n = \frac{t}{T} = \frac{60}{0.00167} = \frac{6000}{1.67} = 1500 \text{ نوسان}$$

$$d = n \times \epsilon A = 1500 \times \epsilon \times \frac{\epsilon}{100} = 15 \times 16 = 240 \text{ m}$$

مطابق نمودار داده شده، دامنه A، دو برابر دامنه B است و طول موج B، سه برابر طول موج A است:

$$\lambda_B = 3\lambda_A, A_A = 2A_B$$

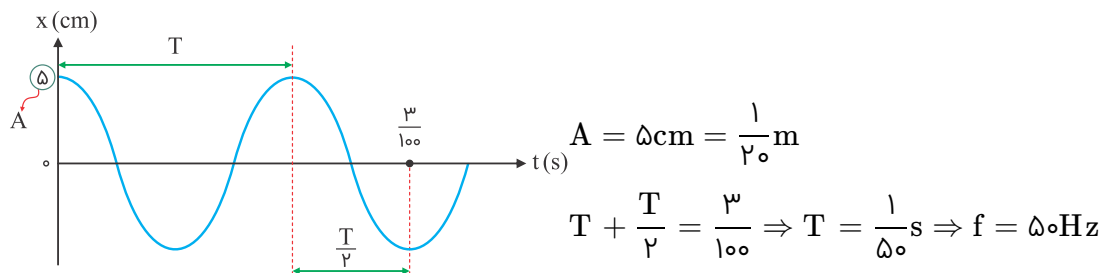
باتوجه به یکسان بودن محیط انتشار دو موج، تندی انتشار آنها یکسان است و باتوجه به رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ داریم:

$$\lambda_B = 3\lambda_A \Rightarrow \frac{v_B}{f_B} = 3\left(\frac{v_A}{f_A}\right) \xrightarrow{v_A=v_B} f_A = 3f_B$$

مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) در یک موج سینوسی برای همه انواع امواج مکانیکی با مربع دامنه (A^2) و نیز مربع بسامد موج (f^2) متناسب است. بنابراین می‌توانیم با استفاده از رابطه $\frac{\bar{P}_A}{\bar{P}_B} = \left(\frac{A_A}{A_B} \times \frac{f_A}{f_B}\right)^2$ نسبت خواسته شده را محاسبه کنیم:

$$\frac{\bar{P}_A}{\bar{P}_B} = \left(\frac{A_A}{A_B} \times \frac{f_A}{f_B}\right)^2 = (2 \times 3)^2 = 36$$

به کمک اطلاعات روی نمودار داریم:



حالا رابطه انرژی مکانیکی نوسانگر را بر حسب نوسانگر را بر حسب دامنه و بسامد می‌نویسیم:

$$E = 2\pi^2 m A^2 f^2 \Rightarrow 25 = 2 \times 10 \times m \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 \times (50)^2 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{ kg} = 200 \text{ g}$$

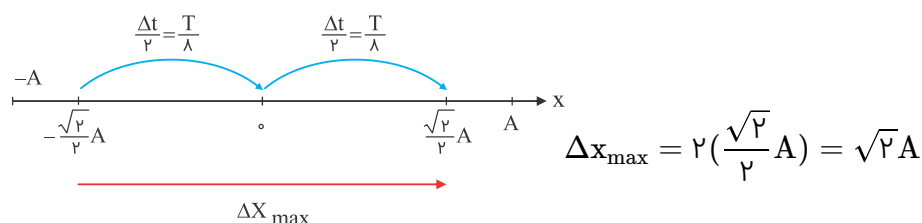
دوره تناوب نوسانگر جرم و فنر را محاسبه می‌کنیم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{20}} = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\sqrt{10}=\pi} T = 2s$$

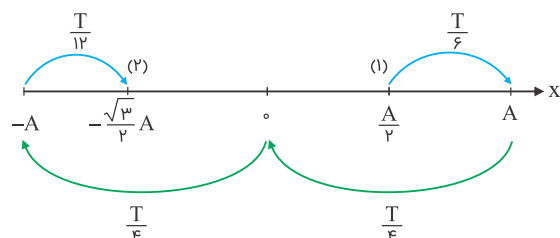
بازه زمانی داده شده را بر حسب دوره تناوب محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0.5}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

نوسانگر هر چند به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد، تندی آن بیشتر است، در نتیجه در وضعیت شکل زیر، نوسانگر بیشترین جابه‌جایی را در مدت $\Delta T = \frac{T}{4}$ دارد.



در زمان‌هایی که نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است، حرکت آن تندشونده است. به کمک الگوهای زمانی برای جابه‌جایی نوسانگر بین نقاط خاص، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{T}{6} + \frac{T}{4} + \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = 3\frac{T}{4} \xrightarrow{\Delta t=1s} 3\frac{T}{4} = 1 \Rightarrow T = \frac{4}{3}s$$

بازه زمانی داده شده را ($\Delta t = 1s$)، بر حسب دوره تناوب محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{f} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{f}$$

معادله مکان- زمان نوسانگر ساده به صورت $x = A \cos \omega t$ است، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{x_1}{A}$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 \xrightarrow{t_2=t_1+\frac{T}{f}} x_2 = A \cos \omega \left(t_1 + \frac{T}{f} \right) = A \cos \left(\omega t_1 + \frac{\omega T}{f} \right)$$

$$\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}} x_2 = A \cos \left(\omega t_1 + \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{f} \right) = A \cos \left(\omega t_1 + \frac{2\pi}{f} \right) = \pm A \sin(\omega t_1)$$

$$\Rightarrow \sin \omega t_1 = \pm \frac{x_2}{A}$$

حالا به کمک رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می‌توان نوشت:

$$\sin^2 \omega t_1 + \cos^2 \omega t_1 = 1 \Rightarrow \left(\pm \frac{x_2}{A} \right)^2 + \left(\frac{x_1}{A} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow A^2 = x_1^2 + x_2^2 \xrightarrow[\substack{x_1=6\text{ cm} \\ x_2=8\text{ cm}}]{A^2=6^2+8^2} A^2=100 \Rightarrow A=10\text{ cm}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = A\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow[\substack{\pi=3, A=10\text{ cm} \\ T=2s}]{\omega=\frac{2\pi}{T}} \omega = \frac{3}{2}, \quad v_{\max} = 15\text{ cm/s}$$

ابتدا دوره تناوب نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{\omega=25\pi} 25\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.04\text{ s} = 40\text{ ms}$$

پس در مدت زمان $t = 160\text{ ms}$ ، نوسانگر دو دوره تناوب انجام می‌دهد.

هنگامی که نوسانگر دو دوره تناوب انجام می‌دهد، چهار بار طول پاره خط مسیر واکنش را طی می‌کند و چهار بار تندی آن بیشینه و نیز چهار بار شتاب آن بیشینه می‌شود. همچنین در طی دو دوره تناوب، بزرگی سرعت آن هشت بار به $\frac{1}{\sqrt{2}}$ بزرگی سرعت بیشینه آن می‌رسد.

$$f_A = 1/\lambda f_B \Rightarrow \frac{c}{\lambda_A} = 1/\lambda \frac{c}{\lambda_B} \Rightarrow \lambda_B = 1/\lambda \lambda_A$$

$$\lambda_B - \lambda_A = 4000\text{ Å} \Rightarrow 1/\lambda \lambda_A - \lambda_A = 4000 \Rightarrow 0/\lambda \lambda_A = 4000$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_A = 5000\text{ Å} \\ \lambda_B = 9000\text{ Å} \end{cases}$$

طول موج طیف مرئی در خلأ بین 4000 Å تا 7000 Å است پس موج A در ناحیه مرئی طیف واقع شده و موج B در ناحیه فروسرخ واقع شده است.

راه حل اول:

باتوجه به اینکه $AC = CO = OD = DB$ است، می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که:

باتوجه به تقارن حرکت هماهنگ ساده نسبت به نقطه O (مرکز نوسان) مدت زمان طی کردن CO و OD باهم برابر و مدت زمان طی کردن BD و AC نیز باهم برابر است. این زمان‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow A \cos \omega t_O = 0 \Rightarrow \omega t_O = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{A}{2} \Rightarrow A \cos \omega t_C = \frac{A}{2} \Rightarrow \omega t_C = \frac{\pi}{3} \\ x = A \Rightarrow A \cos \omega t_A = A \Rightarrow \omega t_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega t_O - \omega t_C = \omega(t_O - t_C) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_O - t_C = t_{OC} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{12} \\ \omega t_C - \omega t_A = \omega(t_C - t_A) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_C - t_A = t_{CA} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{6} \end{cases}$$

پس:

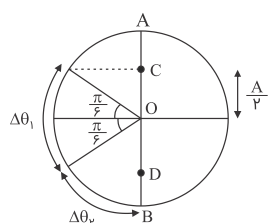
$$t_1 = t_{CD} = \frac{T}{12} + \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$$

$$t_2 = t_{DB} = \frac{T}{6}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{6}} = 1$$

راه حل دوم (به روش نظام قدیم):

تمام بازه‌های مشخص شده برابر هستند، همگی $\frac{A}{2}$ (نصف دامنه نوسان هستند). این نقاط را روی دایره مشخص می‌کنیم:



$$D \text{ تا } C : \Delta\theta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \times t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

$$B \text{ تا } D : \Delta\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \times t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{T}{6}$$

حال نسبت t_1 به t_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{T}{\epsilon}}{\frac{T}{\epsilon}} = 1$$

گزینه ۲

۳۶

از شکل مشخص است که طول موج، موج صوتی B دو برابر موج صوتی A است و نیز دامنه A، دو برابر دامنه B است. ضمناً چون هر دو موج در یک محیط قرار دارند تندی انتشار یکسانی دارند پس داریم:

$$\begin{aligned} V_A = V_B &\Rightarrow \lambda_A f_A = \lambda_B f_B \xrightarrow{\lambda_B = 2\lambda_A} f_A = 2f_B \\ \Delta\beta = \beta_A - \beta_B &= 10 \log\left(\frac{I_A}{I_B}\right) = 10 \log\left(\frac{A_A}{A_B} \times \frac{f_A}{f_B}\right)^2 = 10 \log(4)^2 \\ &= 10 \log 2^4 = 40 \log 2 = 40 \times 0.3 = 12 \text{ dB} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۳۷

مکان‌های داده شده را در معادله قرار داده و زمان‌های متناظر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x = A \cos \omega t \xrightarrow{x=\frac{A}{2}} \frac{A}{2} &= A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow t &= \frac{T}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6} \Rightarrow x = A \cos \omega t \xrightarrow{x=0} 0 = A \cos \omega t \Rightarrow t = \frac{T}{4} \\ \Rightarrow t_2 &= \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{T}{12} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}} = 2 \Rightarrow t_1 = 2t_2 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۳۸

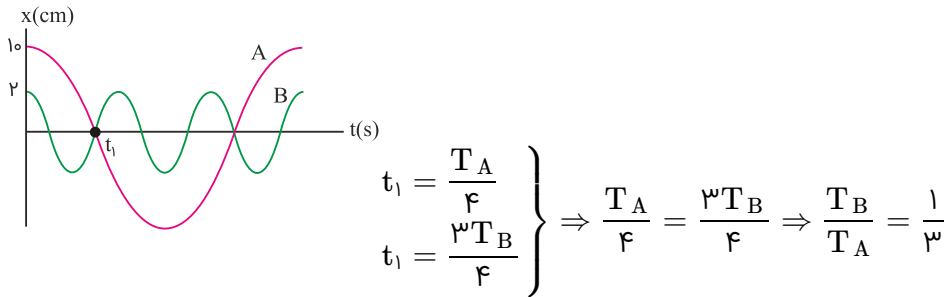
با استفاده از رابطه شتاب در حرکت نوسانی ساده $a = -\omega^2 x$ و قانون دوم نیوتون داریم:

$$\begin{aligned} F = ma &= -m\omega^2 x \Rightarrow 12 = -(100 \times 10^{-3})(20\pi)^2 \times x \\ 12 &= -0.1 \times 400\pi^2 x \Rightarrow x = -0.03 \text{ m} \end{aligned}$$

حال می‌توان با استفاده از معادله مکان- زمان نوسانگر، لحظات موردنظر را به دست آورد.

$$\begin{aligned} x = -0.03 &\Rightarrow 0.06 \cos 20\pi t = -0.03 \Rightarrow \cos 20\pi t = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos 20\pi t_1 = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 20\pi t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30} \text{ s} \\ \cos 20\pi t_2 = \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow 20\pi t_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{15} \text{ s} \end{cases} \end{aligned}$$

گام اول: باتوجه به نمودار نسبت دوره تناوب دو نوسانگر برابر است با:



گام دوم: انرژی مکانیکی از رابطه $E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$ به دست می‌آید. این رابطه را به صورت نسبتی بین دو نوسانگر می‌نویسیم:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 \times \left(\frac{\omega_A}{\omega_B}\right)^2 \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \frac{E_A}{E_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 \times \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\frac{T_B}{T_A} = \frac{1}{3}} \frac{E_A}{E_B} = \frac{m_A}{m_B} \times (\omega)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{36}{2\omega}$$

ابتدا به کمک نمودار، ω را محاسبه می‌کنیم:

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow 2\sqrt{3} = 4 \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

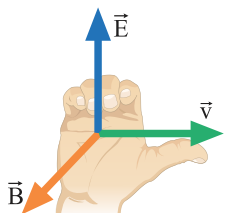
چون برای بار دوم $\cos \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ شده است، پس داریم:

$$\omega t = \frac{11\pi}{6} \xrightarrow{t = \frac{11}{120}} \omega \times \frac{11}{120} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \omega = 20\pi$$

حالا از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، ثابت فنر را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = 2 \times 400\pi^2 = 800\pi^2 \text{ N/m}$$

در امواج الکترومغناطیسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر هم عمود و همچنین هم‌فازند؛ بنابراین در نقطه A که میدان الکتریکی صفر است، میدان مغناطیسی نیز صفر است. در نقطه B میدان الکتریکی در جهت مثبت محور y است و با روش دست راست می‌توان نتیجه گرفت که اگر موج در جهت +x منتشر شود و میدان الکتریکی در جهت +y باشد، میدان مغناطیسی در جهت +z یعنی برون‌سو خواهد بود.



گزینه ۲

۴۲

گام اول: باتوجه به نمودار $\frac{T}{\epsilon} = \frac{0.5}{\omega} \text{ s}$ است، پس $T = 2 \text{ s}$ است. همچنین لحظه t_2 برابر با $T = 2 \text{ s}$ است.
گام دوم: باتوجه به نمودار مسافت طی شده در بازه t_1 تا t_2 برابر با $\ell = 3A$ است؛ پس تندی متوسط در این بازه برابر است با:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{3A}{t_2 - t_1} = \frac{3A}{2 - 0.5} = \frac{3 \times 0.04}{1.5} = 0.08 \text{ m/s}$$

گام سوم: سرعت نوسانگر در لحظه t_1 برابر با $-v_{\max}$ است؛ زیرا نوسانگر در مرکز نوسان است و در جهت منفی محور x حرکت می کند. در لحظه t_2 ، متحرک در نقطه بازگشت قرار دارد و سرعت آن برابر با صفر است؛ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t_2} - v_{t_1}}{t_2 - t_1} = \frac{0 - (-A\omega)}{1.5} = \frac{0.04 \times \frac{2\pi}{2}}{1.5} = 0.08 \text{ m/s}^2$$

گام اول

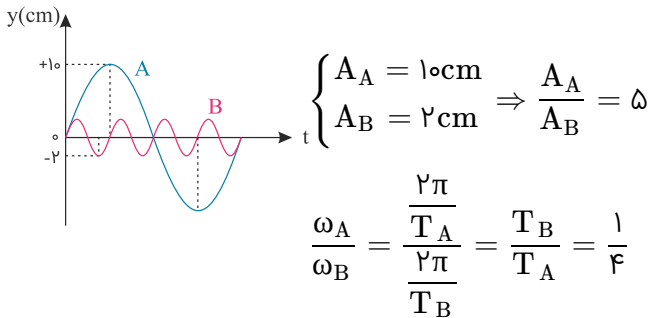
الف) جرم نوسانگر B، پنج برابر جرم نوسانگر A است $m_B = 5m_A \leftarrow$

ب) انرژی مکانیکی نوسانگر A چندبرابر انرژی مکانیکی نوسانگر B است؟ $\leftarrow \frac{E_A}{E_B} = ?$

گام دوم

با استفاده از معادله $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ باید نسبت $\frac{E_A}{E_B}$ را به دست آوریم.

برای این منظور باید نسبت‌های $\frac{A_A}{A_B}$ و $\frac{\omega_A}{\omega_B}$ را محاسبه کنیم؛ باتوجه به نمودار داریم:

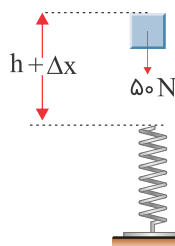


درنتیجه نسبت $\frac{E_A}{E_B}$ برابر است با:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{1}{2} m_A \omega_A^2 A_A^2}{\frac{1}{2} m_B \omega_B^2 A_B^2} = \frac{m_A}{5m_A} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (5)^2 = \frac{5}{16}$$

راه حل اول:

حداکثر فشردگی فنر در صورتی است که تمام انرژی پتانسیل گرانشی آزادشده وزنه به انرژی پتانسیل کشسانی فنر تبدیل شود.



$$mg(h + \Delta x) = \frac{1}{2}k \cdot \Delta x^2 \Rightarrow 50(0.1 + \Delta x) = \frac{1}{2} \times 2000 \times \Delta x^2$$

$$200\Delta x^2 - 10\Delta x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 0.1\text{m} = 10\text{cm} \\ \Delta x_2 = -\frac{1}{200}\text{m} \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

راه حل دوم:

باتوجه به صورت سؤال وقتی اتلاف وجود نداشته باشد، پس از برخورد وزنه به فنر، این دو به صورت یک سامانه جرم- فنر حرکت نوسانی هماهنگ ساده خواهند داشت. انرژی مکانیکی این سامانه تنها ناشی از انرژی پتانسیل گرانشی آزادشده وزنه است و انرژی دیگری وجود ندارد.

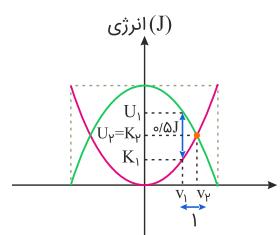
انرژی مکانیکی سامانه جرم- فنر برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن است ($E = K + U$). باتوجه به اینکه اتلاف وجود ندارد، انرژی مکانیکی این سامانه در تمام نقاط مسیر از جمله نقطه تعادل (وقتی که فنر بدون هیچ گونه کشیدگی است) و نقاط بازگشتی (نقاطی که فنر دارای حداکثر کشیدگی یا حداکثر فشردگی است) پایسته می ماند.

مسئله حداکثر فشردگی فنر را می خواهد که درواقع همان دامنه نوسان سامانه است. پس با استفاده از رابطه انرژی مکانیکی سامانه جرم- فنر داریم:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}kA^2 \\ E = mg(h + A) \end{cases} \Rightarrow 50(0.1 + A) = \frac{1}{2} \times 2000 \times A^2$$

$$\Rightarrow 200A^2 - 10A - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0.1\text{m} = 10\text{cm} \\ A = -\frac{1}{200}\text{m} \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

گام اول: مطابق شکل زیر، مقادیر سرعت و انرژی‌های پتانسیل و جنبشی را برای دو نقطه موردنظر مشخص می‌کنیم و سپس قانون بقا، انرژی مکانیکی را برای دو نقطه می‌نویسیم:



$$U_1 - K_1 = 0.5 \Rightarrow U_1 = K_1 + 0.5$$

$$v = v_1 \Rightarrow E = K_1 + U_1 = K_1 + (K_1 + 0.5) \Rightarrow E = 2K_1 + 0.5 \quad (I)$$

$$U_2 = K_2$$

$$v = v_2 \Rightarrow E = K_2 + U_2 = K_2 + K_2 \Rightarrow E = 2K_2 \quad (II)$$

گام دوم: در ادامه باتوجه به رابطه‌های (I) و (II)، داریم:

$$2K_1 + 0.5 = 2K_2 \Rightarrow 2 \times \frac{1}{2}mv_1^2 + 0.5 = 2 \times \frac{1}{2}mv_2^2 \xrightarrow{(m=0.1 \text{ kg})} 0.1v_1^2 + 0.5 = 0.1v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 5 \quad (III)$$

گام سوم: باتوجه به نمودار فوق خواهیم داشت:

$$v_2 - v_1 = 1 \quad (IV)$$

$$(III): v_2^2 - v_1^2 = 5 \Rightarrow (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 5 \Rightarrow 1 \times (v_2 + v_1) = 5 \Rightarrow v_2 + v_1 = 5 \quad (V)$$

با استفاده از دو رابطه (IV) و (V) داریم:

$$v_1 = 2 \text{ m/s}, \quad v_2 = 3 \text{ m/s}$$

گام چهارم: در پایان خواسته تست را با استفاده از رابطه (I) به دست می‌آوریم:

$$E = 2K_1 + 0.5 = 2 \times \frac{1}{2}mv_1^2 + 0.5 = 0.1 \times (2)^2 + 0.5 = 0.9$$

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow 0.9 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max}^2 = 18 \Rightarrow v_{\max} = 3\sqrt{2} \text{ m/s}$$